3.2. Kombinationen und Variationen

An dieser Stelle möchte ich die Kombination und die Variation noch mal ganz klar von der Permutation abgrenzen. Wirf dazu noch mal kurz einen Blick auf die Übersicht Kombinatorik auf der Seite 152 und komm dann wieder an diese Stelle zurück. Du hast in der Übersicht gesehen, dass zuerst die Frage gestellt wird, ob eine Auswahl getroffen wird oder nicht. Bei Permutationen wird keine Auswahl getroffen und deswegen werden alle vorhandenen Elemente angeordnet. Bei Kombination und Variation wird eine Auswahl durch Ziehen getroffen und die gezogenen Elemente werden angeordnet.

Nachdem die Abgrenzung zur Permutation klar ist, ist dir in der Übersicht auf der ersten Seite vielleicht aufgefallen, dass man Kombinationen und Variationen sowohl mit Zurücklegen (mit Wiederholung) als auch ohne Zurücklegen (ohne Wiederholung) bestimmen kann. Wenn man das auf das so genannte „Urnenmodell“, also ziehen von Kugeln aus einer Urne, überträgt, dann muss man also unterscheiden, ob man die gezogenen Kugeln in die Urne wieder zurücklegt oder draußen lässt. Diese Unterscheidung siehst du in der folgenden Tabelle an den 2 Spalten. Die erste Spalte ist mit Zurücklegen und die zweite ohne Zurücklegen.

Jetzt brauchen wir nur noch den Unterschied zwischen Variation (geordnete Stichprobe) und Kombination (ungeordnete Stichprobe) herauszuarbeiten. Bei der Variation spielt die Reihenfolge beim ziehen eine Rolle, während bei Kombinationen die Reihenfolge beim ziehen keine Rolle spielt. Was bedeutet nun das Kriterium Reihenfolge. Nehmen wir an, es werden 2 Kugeln gezogen, und zwar die Zahlen 1 und 2. Bei der Variation spielt die Reihenfolge, in der die Kugeln gezogen werden, eine Rolle. Deswegen ist 1,2 eine andere Variation als 2,1. Bei der Kombination spielt die Reihenfolge, in der die Kugeln gezogen werden, keine Rolle. Die Kombination 1,2 wird nicht von der Kombination 2,1 unterschieden. Den Begriff Reihenfolge können wir auch etwas praktischer angehen. Das Samstagslotto aus dem Fernsehen ist eine Kombination (ohne Reihenfolge), denn wann z.B. die Kugel mit der Zahl 5 gezogen wird, spielt keine Rolle. Entscheidend ist nur, dass sie gezogen wurde und somit jeweils nur eine Kombination entsteht. Für die Variation (mit Reihenfolge) ist Pferderennen ein gutes Beispiel. Es macht einen Unterschied, ob die Pferde mit der Nummer 1,2 und 3 in dieser Reihenfolge oder in der Reihenfolge 2,1 und 3 ins Ziel kommen. Es handelt sich um unterschiedliche Variationen. Das Kriterium Reihenfolge wirkt sich ebenfalls auf die folgende Tabelle aus, wobei die erste Zeile mit und die zweite ohne Reihenfolge ist.

n = Anzahl Elemente k = Anzahl Ziehungen	mit Zurücklegen und mit Wiederholung	ohne Zurücklegen und ohne Wiederholung
VARIATION (mit Reihenfolge) Geordnete Stichprobe z.B. Pferderennen	n^k	$\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!}$ Taschenrechner: nPr
KOMBINATION (ohne Reihenfolge) Ungeordnete Stichprobe z.B. Samstagslotto	$\binom{n+k-1}{k}$ Taschenrechner: nCr	$\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)! \cdot k!}$ Taschenrechner: nCr

Ziehen mit Zurücklegen und mit Reihenfolge. Wir erhalten folgende Variationen (V)

11	21	31	41	51
12	22	32	42	52
13	23	33	43	53
14	24	34	44	54
15	25	35	45	55

Insgesamt erhalten wir 25 Variationen. Versuchen wir diese Zahl mit der Formel aus der Tabelle auf der vorigen Seite zu bestimmen

$$V = n^k = 5^2 = 25$$

Ziehen ohne Zurücklegen und mit Reihenfolge. Wir erhalten folgende Variationen (V)

	21	31	41	51
12		32	42	52
13	23		43	53
14	24	34		54
15	25	35	45	

Insgesamt erhalten wir 20 Variationen. Diese Zahl ist geringer als die aus dem vorigen Versuch, denn jetzt können einmal gezogene Kugeln nicht wieder gezogen werden und deswegen gibt es weniger Variationen. Versuchen wir die Zahl 20 mit der Formel aus der Tabelle auf der vorigen Seite zu bestimmen. Die Klammer mit dem Inhalt n und k spricht man übrigens n über k aus.

$$V = \binom{n}{k} \text{ mit nPr} = \frac{n!}{(n-k)!} = \frac{5!}{(5-2)!} = \frac{5!}{3!} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5}{1 \cdot 2 \cdot 3} = \frac{120}{6} = 20$$

Versuche auch auf den Wert 20 direkt mit der nPr-Taste deines Taschenrechners zu kommen

Es ist übrigens immer so, sowohl bei der Variation als auch bei der Kombination, dass bei ohne Zurücklegen weniger Möglichkeiten entstehen.

Ziehen mit Zurücklegen und ohne Reihenfolge. Wir erhalten folgende Kombinationen K

11				
12	22			
13	23	33		
14	24	34	44	
15	25	35	45	55

Insgesamt erhalten wir 15 Kombinationen. Die Anzahl der Kombinationen ist geringer als die Anzahl des gleichen Versuches mit Reihenfolge (Variation), denn ohne Reihenfolge ist ja die Kombination 1,2 identisch mit 2,1 und deswegen gibt es weniger Kombinationen. Versuchen wir die Zahl 15 mit der Formel aus der Tabelle auf der vorigen Seite zu bestimmen

$$K = \binom{n+k-1}{k} = \binom{5+2-1}{2} = \binom{6}{2} = 15$$ Hier muss man die nCr-Taste benutzen

Ziehen ohne Zurücklegen und ohne Reihenfolge Wir erhalten folgende Kombinationen

12			
13	23		
14	24	34	
15	25	35	45

Insgesamt erhalten wir 10 Kombinationen. Diese Zahl ist geringer als die aus dem vorigen Versuch, denn jetzt können einmal gezogene Kugeln nicht wieder gezogen werden und deswegen gibt es weniger Kombinationen. Die Zahl ist auch geringer als die Anzahl beim Versuch mit Reihenfolge, denn die Kombination 1,2 ist ja wieder identisch mit der Kombination 2,1. Versuchen wir die Zahl 10 mit der Formel aus der Tabelle auf der vorigen Seite zu bestimmen

$$K = \binom{n}{k} \text{ mit nCr} = \frac{n!}{(n-k)! \cdot k!} = \frac{5!}{(5-2)! \cdot 2!} = \frac{5!}{3! \cdot 2!} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 1 \cdot 2} = \frac{120}{12} = 10$$

Versuche auch auf den Wert 10 direkt mit der nCr-Taste deines Taschenrechners zu kommen

Es gibt übrigens immer weniger Kombinationen (ohne Reihenfolge) als Variationen (mit Reihenfolge).