3.1. Permutationen

Der Begriff Permutation kann am besten mit dem Begriff Anordnung übersetzt werden. Da soll also etwas angeordnet werden. Bei Permutationen ist wichtig, dass alle vorhandenen Elemente angeordnet werden. Dies unterscheidet übrigens die Permutation von der Variation und der Kombination, bei denen nicht alle vorhandenen Elemente angeordnet werden. In den beiden letztgenannten Fällen wird eine so genannte Auswahl durch Ziehen getroffen, aber dazu später mehr. Wir halten noch mal fest, dass bei der Permutation alle vorhandenen Gegenstände angeordnet werden.

Innerhalb der Permutation muss man unterscheiden zwischen der Permutation ohne und mit Wiederholung. Bei der Permutation ohne Wiederholung, kommt jedes Element nur einmal vor. Bei der Permutation mit Wiederholung kommt mindestens 1 Element mindestens 2mal vor. Man muss sich also zunächst die Frage stellen, ob alle Elemente unterschiedlich sind oder nicht.

Permutation ohne Wiederholung: Wir haben 3 Kugeln schwarz (s) weiß (w) und rot (r). Jede Kugel kommt also nur einmal vor und deswegen handelt es sich um eine Permutation ohne Wiederholung. Wir hatten ja schon gesagt, dass Permutation Anordnung bedeutet. Na, dann wollen wir mal die 3 Kugeln anordnen: swr, srw, wsr, wrs, rsw und rws . Wir erhalten also 6 Permutationen (P). Rechnerisch erhalten wir die Zahl 6 mit folgender Formel

$P = n!$ mit n = Anzahl der Elemente

Wir haben 3 Elemente und setzen diese Zahl für n in der Formel ein

$$P = n! = 3! = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$$

Das Ausrufungszeichen nennt man mathematisch übrigens Fakultät und bedeutet nur, dass man alle Zahlen bis zu der genannten Zahl ausmultiplizieren soll. Du siehst ja oben in dem Beispiel die Bedeutung von 3! (drei Fakultät).

Permutation mit Wiederholung: Wir haben 3 Kugeln, 2 schwarze (s) und eine weiße (w). Im Gegensatz zum vorigen Beispiel sind jetzt nicht alle Elemente unterschiedlich, denn wir haben 2 schwarze Kugeln. Deswegen handelt es sich in diesem Fall um eine Permutation mit Wiederholung. Versuchen wir auch hier die 3 Kugeln anzuordnen: ssw, sws und wss. Wir erhalten also 3 Permutationen (P). Rechnerisch erhalten wir die Zahl 3 mit folgender Formel

$$P = \frac{n!}{n_1! \cdot n_2! \cdot \cdots \cdot n_k!} \quad \textit{oder} \quad n! \cdot \prod_{i=1}^{k} \frac{1}{n_i!} \quad \text{mit} \quad \begin{aligned} n &= \text{Anzahl aller Elemente} \\ n_1 &= \text{Anzahl Element 1} \\ n_2 &= \text{Anzahl Element 2} \\ k &= \text{Anzahl unterschiedlicher Elemente} \end{aligned}$$

Durch Einsetzen in die Formel erhalten wir:

$$P = \frac{n!}{n_1! \cdot n_2! \cdot \cdots \cdot n_k!} = \left(\frac{\text{alle Kugeln}!}{\text{schwarze Kugeln}! \cdot \text{weisse Kugeln}!} \right) = \frac{3!}{2! \cdot 1!} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot}{1 \cdot 2 \cdot 1} = \frac{6}{2} = 3$$