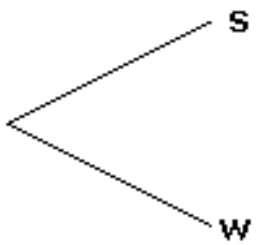
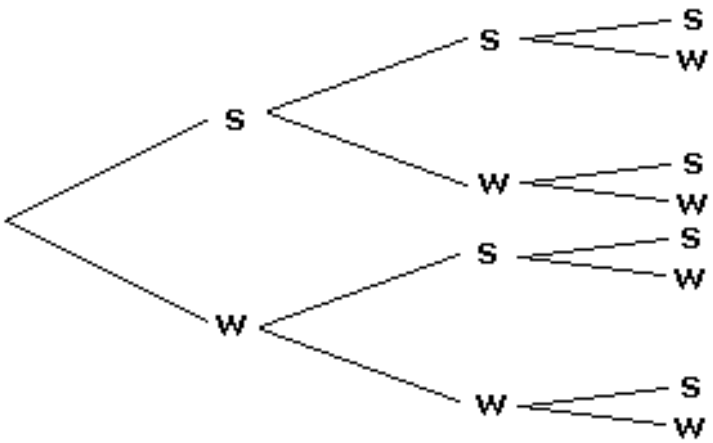
2.4. Mehrstufige Zufallsexperimente

Zufallsexperimente können einstufig, also einmalig, durchgeführt werden oder auch mehrstufig, also wiederholt. Wirft man einen Würfel z.B. nur einmal, dann ist das Zufallsexperiment einstufig. Wirft man den Würfel allerdings mehr als 1-mal, dann handelt es sich um ein mehrstufiges Zufallsexperiment. Zur Darstellung dieser mehrstufigen Zufallsexperimente benutzt man so genannte **Baumdiagramme**, von denen du in diesem Kapitel einige Exemplare sehen wirst.

Schauen wir uns an, wie ein solches Baumdiagramm konstruiert wird. Wie das geschieht, sehen wir an folgendem Beispiel. In einer Urne befinden sich 10 Kugeln, von denen 6 schwarz und 4 weiß sind. Aus dieser Urne sollen auf jeden Fall 3 Kugeln gezogen werden. Wenn man nun anfängt, ein Baumdiagramm zu zeichnen, muss man sich überlegen, was passieren kann. In unserem Beispiel könnte aus der Urne beim ersten Zug eine schwarze oder eine weiße Kugel gezogen werden. Unser Baum hat also im ersten Schritt 2 Zweige, wobei wir an das Ende des Zweiges dran schreiben, was dieser Zweig bedeutet, nämlich „s“ steht für schwarz und „w“ steht für weiß.



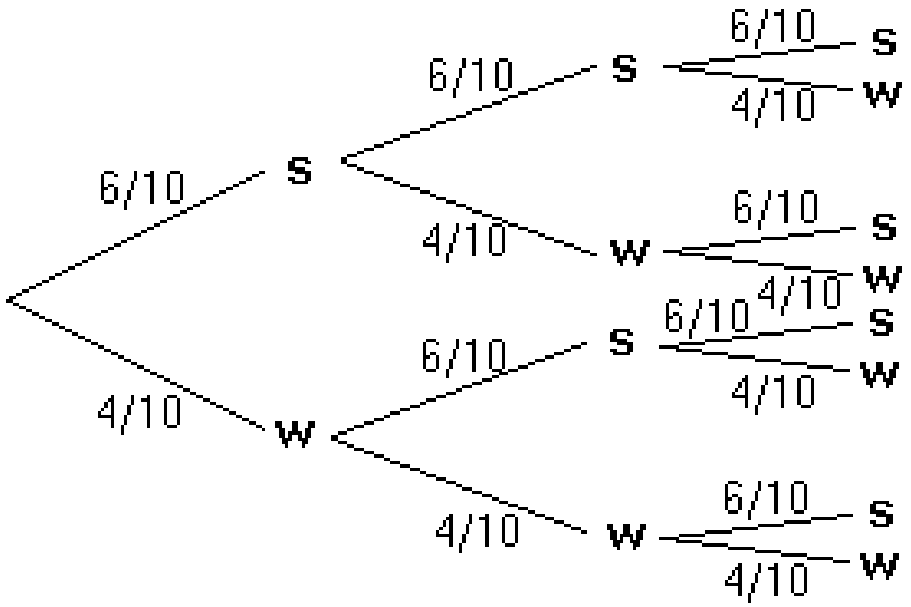
In dieser Form stellt das Baumdiagramm allerdings ein einstufiges Zufallsexperiment dar, denn es wird 1-mal gezogen und es wird entweder schwarz (s) oder weiß (w) gezogen. Unser Zufallsexperiment ist aber dreistufig, denn wir wollen aus der Urne ja 3 Kugeln ziehen. Wenn also im ersten Versuch eine schwarze Kugel gezogen wurde, dann kann im zweiten Versuch schwarz oder weiß gezogen werden. Das Gleiche gilt für den Fall, dass im ersten Versuch weiß gezogen wurde. Wenn wir anschließend noch den dritten Versuch mit einbeziehen, erhalten wir folgendes Baumdiagramm.



An das auf der vorigen Seite konstruierte Baumdiagramm kann man nun noch die Wahrscheinlichkeiten dran schreiben. Der Wert dieser Wahrscheinlichkeiten hängt von der Aufgabenstellung ab, wobei die beiden folgenden Fälle zu unterscheiden sind.

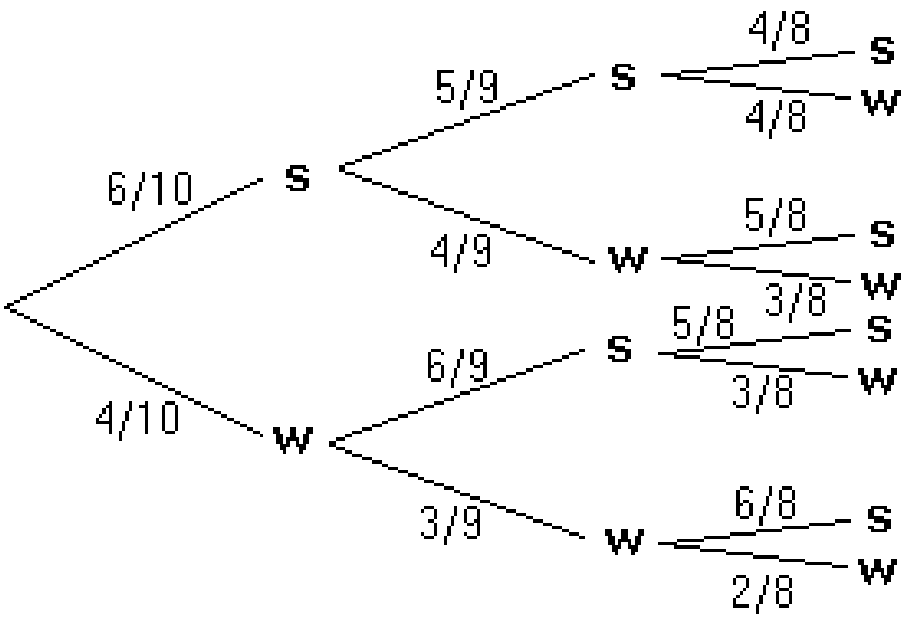
Fall a) Die Kugeln werden gezogen und anschließend wieder in die Urne zurückgelegt, also mit zurücklegen

In diesem Fall ändert sich an den Wahrscheinlichkeiten nichts. Betrachten wir uns den ersten Versuch. Die Wahrscheinlichkeit, eine schwarz Kugel zu ziehen ist gemäß der Formel günstige durch alle $\frac{6}{10}$ (6 von 10 Kugeln sind schwarz) und die Wahrscheinlichkeit eine weiße Kugel zu ziehen ist aufgrund der Formel dann $\frac{4}{10}$ (4 von 10 Kugeln sind weiß). Da die gezogene Kugel wieder in die Urne zurückgelegt wird, ist die Wahrscheinlichkeit, eine schwarze Kugel beim zweiten Versuch zu ziehen, genau so groß, wie beim ersten Versuch. Gleiches gilt für die weiße Kugel. Im dritten Versuch ändert sich wegen dem Zurücklegen auch wieder nichts. Wenn wir die Wahrscheinlichkeiten an die Äste dran schreiben, dann erhalten wir folgenden Baum.



Fall b) Die Kugeln werden gezogen und anschließend <u>nicht</u> wieder in die Urne Zurückgelegt, also ohne zurücklegen.

In diesem Fall ändern sich die Wahrscheinlichkeiten. Betrachten wir uns den ersten Versuch. Die Wahrscheinlichkeit, eine schwarze Kugel zu ziehen ist gemäß der Formel günstige durch alle $\frac{6}{10}$ (6 von 10 Kugeln sind schwarz) und die Wahrscheinlichkeit eine weiße Kugel zu ziehen ist aufgrund der Formel dann $\frac{4}{10}$ (4 von 10 Kugeln sind weiß). Da die gezogene Kugel jetzt allerdings nicht in die Urne zurückgelegt wird, ändern sich die Eintrittswahrscheinlichkeiten für schwarz oder weiß im zweiten Versuch. Nehmen wir an, dass im ersten Versuch eine schwarze Kugel gezogen wurde und diese bleibt jetzt draußen. Dann sind auf jeden Fall nur noch 9 Kugeln in der Urne, von denen 5 schwarz sind. Gemäß der Formel erhalten wir für die Wahrscheinlichkeit, eine schwarze Kugel zu ziehen $\frac{5}{9}$ (5 von 9 Kugeln sind schwarz). Die Wahrscheinlichkeit, im zweiten Versuch eine weiße Kugel zu ziehen, nachdem im ersten eine schwarze Kugel gezogen wurde, beträgt $\frac{4}{9}$ (4 von 9 Kugeln sind weiß). Versuche die Wahrscheinlichkeiten in dem folgenden Baumdiagramm nachzuvollziehen. Beachte dabei insbesondere beim dritten Versuch, dass nur noch 8 Kugeln in der Urne sind.



Achte also immer darauf, ob der Versuch mit oder ohne zurücklegen ablaufen soll, denn diese Tatsache beeinflusst die Wahrscheinlichkeiten, die man an die Äste des Baumdiagramms schreiben muss. Ist der Versuch mit Zurücklegen, dann ändern sich die Wahrscheinlichkeiten nicht, ansonsten schon.

Zum Baumdiagramm lässt sich noch folgendes sagen:

1. Die Summe der Wahrscheinlichkeiten bei einer Verzweigung ergibt immer 1.
2. Ein Pfad (von vorne bis hinten), stellt ein mögliches Ergebnis des Zufallsexperimentes dar.
3. Die Wahrscheinlichkeit eines Pfades kann man mit der **Pfadmultiplikation** (S.147) bestimmen.
4. Addiert man die Wahrscheinlichkeiten aller Pfade, so erhält man 1 oder 100 %.
5. Wahrscheinlichkeiten von Ereignissen, die mehrere günstige Pfade haben, werden mit der **Pfadaddition** (S.148) berechnet.

Wichtiger Hinweis zu mehrstufigen Zufallsexperimenten, bei denen <u>gleichzeitig</u> gezogen wird.

Auf den vorigen Seiten haben wir gesehen, dass man unterscheiden muss, ob die gezogenen Kugeln in die Urne zurückgelegt werden oder nicht. Die folgende Abgrenzung ist nicht einfach:

Wir sind bisher immer davon ausgegangen, dass bei einem Zug immer nur eine Kugel herausgezogen wird. Das muss nicht immer so sein. Die Aufgabenstellung könnte auch vorsehen, dass man 3 Kugeln auf einmal, also gleichzeitig ziehen soll. **Gleichzeitiges ziehen mehrerer Kugeln ist gleichbedeutend mit nacheinander ziehen ohne zurücklegen.**

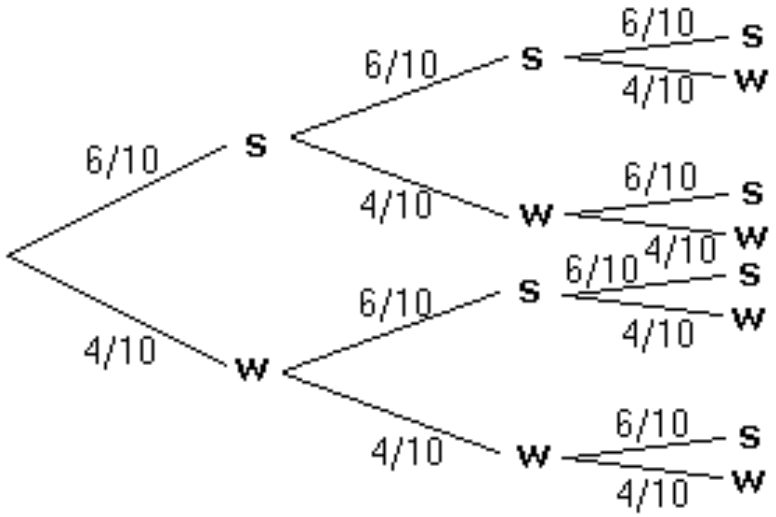
Es gibt allerdings auch Fälle, in denen etwas gleichzeitig passiert und dies ist gleichbedeutend mit nacheinander ziehen mit zurücklegen. Das ist z.B. beim gleichzeitigen Wurf mehrerer Würfel der Fall.

Man muss beim gleichzeitigen Ziehen also überlegen, ob durch das gleichzeitige Ziehen verhindert wird, dass ein bestimmtes Ergebnis nicht mit der gleichen Wahrscheinlichkeit eintritt. Das ist bei den Kugeln so und deswegen ist hier gleichzeitiges Ziehen am besten durch nacheinander Ziehen ohne zurücklegen dargestellt, da eine gegriffene Kugel nicht noch mal gegriffen werden kann. Beim gleichzeitigen Werfen von würfeln kann eine gewürfelte Zahl ja durch einen anderen Würfel wieder dargestellt werden und deswegen trifft hier besser nacheinander Ziehen mit zurücklegen.

2.4.1. Pfadregeln (Pfadmultiplikation und Pfadaddition)

Im Kapitel mehrstufige Zufallsexperimente (S.143) haben wir gesehen, wie man solche Zufallsexperimente als Baumdiagramm darstellen kann. An einem solchen Baumdiagramm gelten bestimmte Rechenregeln bezüglich der Wahrscheinlichkeit von Ereignissen, nämlich die Pfadmultiplikation und die Pfadaddition.

Mithilfe der **Pfadmultiplikation** kann man die Wahrscheinlichkeit einzelner Pfade berechnen. Betrachten wir uns das folgende Baumdiagramm, das du bereits aus dem Kapitel mehrstufige Zufallsexperimente kennst. Es handelt sich um ein mehrstufiges Zufallsexperiment, bei dem aus einer Urne mit 10 Kugeln (6 schwarze und 4 weiße) 3mal mit zurücklegen gezogen wird. Da die Kugeln immer wieder zurückgelegt werden, ändern sich die Eintrittswahrscheinlichkeiten auch nicht.



Wie groß ist die Eintrittswahrscheinlichkeit P(A) für das Ereignis A, nämlich dass 3mal eine schwarze (s) Kugel gezogen wird. Wir suchen uns den günstigen Pfad aus dem Baumdiagramm heraus, nämlich den Pfad sss. Die Eintrittswahrscheinlichkeit dieses Pfades können wir mithilfe der Pfadmultiplikation berechnen, indem wir die einzelnen Wahrscheinlichkeiten an den jeweiligen Pfaden multiplizieren. Wir erhalten:

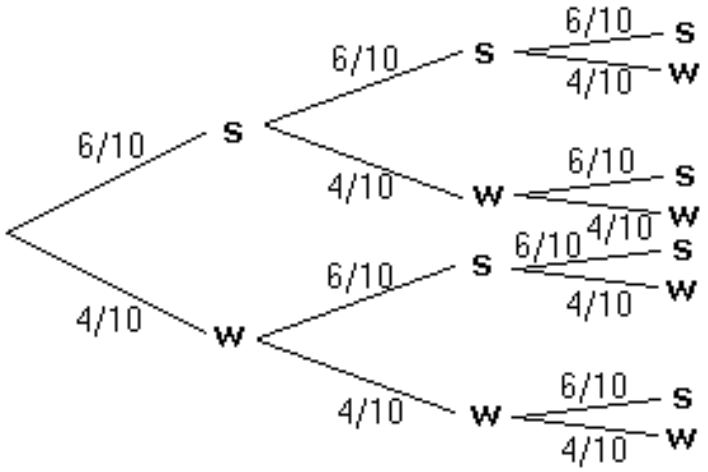
$$P(A) = P(sss) = \frac{6}{10} \cdot \frac{6}{10} \cdot \frac{6}{10} = \frac{216}{1000} = 0{,}216 = 21{,}6\,\%$$

Interpretation des Ergebnisses: Die Wahrscheinlichkeit, dass man bei 3maligem ziehen aus einer Urne mit 10 Kugeln (6 schwarze und 4 weiße) nur schwarze Kugeln herauszieht, beträgt 0,216 oder 21,6 %

Wir merken uns also, dass man die Wahrscheinlichkeit einzelner Pfade mithilfe der Pfadmultiplikation, also durch Multiplikation der Wahrscheinlichkeiten, die an dem gesamten Pfad dran stehen, erhält.

Mit Hilfe der **Pfadaddition** kann man die Wahrscheinlichkeit von Ereignissen bestimmen, die aus mehreren günstigen Pfaden bestehen. Man berechnet zunächst mit Hilfe der Pfadmultiplikation die Wahrscheinlichkeiten der einzelnen günstigen Pfade und addiert am Schluss diese Wahrscheinlichkeiten, deswegen auch die Bezeichnung Pfadaddition.

Betrachten wir wieder unser bekanntes Baumdiagramm von der vorigen Seite:



Diesmal ist die Eintrittswahrscheinlichkeit P(B) des Ereignisses B gesucht, nämlich dass bei 3maligem ziehen genau 1mal schwarz (s) dabei ist. Suchen wir uns aus dem Baumdiagramm wieder die günstigen Pfade (in diesem Fall sind es mehrere) heraus. Günstig sind sww, wsw und wws. Wir müssen also zunächst mithilfe der Pfadmultiplikation die Wahrscheinlichkeit dieser 3 Pfade berechnen.

$$P(sww) = \frac{6}{10} \cdot \frac{4}{10} \cdot \frac{4}{10} = \frac{96}{1000} = 0{,}096 = 9{,}6\,\%$$
$$P(wsw) = \frac{4}{10} \cdot \frac{6}{10} \cdot \frac{4}{10} = \frac{96}{1000} = 0{,}096 = 9{,}6\,\%$$
$$P(wws) = \frac{4}{10} \cdot \frac{4}{10} \cdot \frac{6}{10} = \frac{96}{1000} = 0{,}096 = 9{,}6\,\%$$

Da beim Ereignis B hier mehrere Pfade günstig sind, muss man gemäß Pfadaddition die einzelnen Pfadwahrscheinlichkeiten addieren.

$$P(B) = P(sww) + P(wsw) + P(wws)$$
$$P(B) = 0{,}096 + 0{,}096 + 0{,}096 = 0{,}288 = 28{,}8\,\%$$

Anmerkung: Es ist nicht zwangsläufig so, dass jeder einzelne Pfad die gleiche Eintrittswahrscheinlichkeit hat. Dies ist hier nur aufgrund der Fragestellung so.

Interpretation des Ergebnisses: Die Wahrscheinlichkeit, dass man bei 3maligem ziehen aus einer Urne mit 10 Kugeln (6 schwarze und 4 weiße) genau 1 schwarze Kugel herauszieht, beträgt 0,288 oder 28,8 %

Beachte den Abschlusshinweis auf der folgenden Seite.

Sonderfall: Gegenereignis bzw. Gegenwahrscheinlichkeit

Gleiches Zufallsexperiment wie bisher, allerdings ist diesmal folgende Eintrittswahrscheinlichkeit P(C) des Ereignisses C gesucht, nämlich dass bei 3maligem Ziehen *höchstens 2 mal* schwarz gezogen wurde. In diesem Fall existieren auch wieder mehrere günstige Pfade, nämlich www, wws, wsw, sww, wss, ssw und sws. Wir müssten also mit Hilfe der Pfadmultiplikation die Wahrscheinlichkeit dieser 7 Pfade berechnen und wegen der Pfadaddition diese 7 Ergebnisse zusammenzählen. Falls wir uns nicht verrechnen, erhalten wir das richtige Ergebnis. Auf das gleiche Ergebnis, allerdings mit viel weniger Aufwand, würde man kommen, wenn man über das Gegenereignis geht. Das Gegenereignis hat genau die Pfade, die oben nicht erwähnt wurden, nämlich sss. Von diesem Pfad berechnet man mit Pfadmultiplikation die Pfadwahrscheinlichkeit und zieht dieses Ergebnis von 1 bzw. 100 % ab. Das funktioniert, weil Ereignis und Gegenereignis zusammen ja 1 oder 100 % ergibt. Denken sie bitte daran, dass man sich mit der Gegenwahrscheinlichkeit bei bestimmten Aufgabenstellungen viel Arbeit ersparen kann.

Sonderfall: mehrstufiges LAPLACE-Experiment

Hat jeder Pfad eines Baumdiagramms die gleiche Eintrittswahrscheinlichkeit, so handelt es sich um ein mehrstufiges LAPLACE-Experiment. Hat in einem solchen Fall ein definiertes Ereignis mehrere günstige Pfade, dann kann man die Wahrscheinlichkeit dieses Ereignisses vereinfacht mit der Formel günstige Pfade durch alle Pfade berechnen. Diese gilt wie gesagt nur dann, wenn jeder Pfad die gleiche Eintrittswahrscheinlichkeit hat.